

Remue-méninges III

proposé par



Finance de marché, IT Finance et Maths

Les Énoncés

- Énoncé.** Une civilisation adopte la loi de reproduction suivante : chaque couple fait des enfants jusqu'à obtenir une fille puis s'arrête de procréer. En supposant que la probabilité d'avoir une fille ou un garçon est égal $1/2$, quelle est la proportion de filles dans cette cité ?

Que se passe-t-il si la probabilité $p \in]0, 1[$ d'avoir une fille est différente de $1/2$?
- Énoncé.** James Bond 007 est retenu entravé au centre d'une piste circulaire sous la menace d'une brute compacte (*i.e.* fermée bornée) montée sur un *quad* (sorte de moto à quatre roues qui ressemble de loin à une tondeuse à gazon). Le *quad* se déplacer 4 fois plus vite que l'agent secret, mais uniquement sur la piste (sinon il se renverse). L'ignoble méchant peut en outre changer son sens de parcours instantanément (chacun aura compris qu'il ne s'agit pas ici d'un exercice de cinématique...) et s'arrêter sur place quand il le souhaite pour barrer la route au fugitif.

James Bond se libère évidemment de ses entraves en quelques secondes. Est-ce peine perdue, ou peut-il néanmoins se tirer de ce mauvais pas ?
- Énoncé.** On considère un plat contenant n spaghetti. On prend l'extrémité d'un spaghetti (au hasard) dans le saladier, puis une seconde (extrémité), et on fait un noeud. On obtient ainsi, soit un cercle si l'on a pris les deux extrémités appartenant au même spaghetti, soit un "nouveau spaghetti" constitué de deux spaghetti attachés que l'on remet dans le plat. (Les "cercles" sont sortis du plat). On répète cette opération jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de spaghetti dans le saladier. (On fait donc l'opération au plus n fois). Quelle est alors le nombre moyen de cercles ainsi formés dans le saladier ?
- Énoncé.** (a) Soit S une action dont la dynamique de prix est un mouvement brownien partant de 100 à la date 0. On considère le contrat d'option qui paie 1 dès que la barrière de 120 est atteinte. Il n'y a pas de taux d'intérêt. Prime de ce produit ?

(b) On imagine maintenant un produit qui paie 1 lorsque l'on atteint la barrière de 120, sous réserve de n'être jamais passé sous 80. Toujours pas de taux d'intérêt. Mais on demande toujours la prime. Et si la barrière basse est de 90 ?

(c) On considère maintenant le même contrat qu'en (a) mais le taux d'intérêt r vaut $r = 10\%$. Valeur de la prime ?

(d) Valoriser le même contrat qu'en (b) mais avec un taux d'intérêt $r = 10\%$.

(e) On considère un contrat qui verse 1 dans un an ($T = 1$) si S a franchi la barrière 120. Valeur de la prime (avec et sans taux d'intérêt) ?

(Extrait d'un entretien de sélection. Toutes les valeurs numériques sont d'origine).

5. *Énoncé.* On se place dans un marché avec un actif risqué S (et sans taux d'intérêt) Je mets en place la stratégie suivante : je vends un Call de strike $K \geq S_0$ (à la date 0), j'achète l'action dès que le cours passe au-dessus de K (donc au prix K) et je la revends si l'action baisse sous K ensuite. Cette stratégie semble gagner tout le temps. Où est l'erreur ?

Toute reproduction, même partielle, interdite
Copyright © [Math-fi.fr](http://math-fi.fr) pour Cogitel Forum, janvier 2007.